

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETÀ'

A matrice quadrata di ordine n

Proprietà 1

In A tutti gli elementi di una riga
(o colonna) sono nulli



il determinante di A è nullo

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A_3 = 0$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A_3 = 0$$

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

A matrice quadrata di ordine n

Proprietà 2

In A scambiamo tra di loro
due righe (o due colonne)



il determinante di A cambia segno

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = -23$$

scambiando tra di loro

le prime due righe di A

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A' = +23$$

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETÀ'

A matrice quadrata di ordine n

Proprietà 3

In A due righe (o due colonne)

sono uguali o proporzionali



il determinante di A è nullo

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -4 & -8 & 2 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = 0 \quad \text{(la seconda colonna è il doppio della prima)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = 0 \quad \text{(le prime due righe sono uguali)}$$

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

A matrice quadrata di ordine n

Proprietà 4

In A moltiplichiamo tutti gli elementi di una riga
(o colonna) per uno stesso numero k non nullo



il determinante di A resta moltiplicato per k

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = -\frac{5}{6}$$

moltiplichiamo per $k = 2$

tutti gli elementi della prima riga

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A' = -\frac{5}{3} = 2 \left(-\frac{5}{6} \right) = 2 \cdot \det A$$

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

A matrice quadrata di ordine n

Proprietà 5: *Teorema della trasposta*

In A scambiamo tra di loro

le righe con le colonne



il determinante di A coincide con

quello della sua trasposta

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\det A = -39$$



$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\det A^T = -39$$

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

A matrice quadrata di ordine n

Proprietà 6

Se A è triangolare (superiore od inferiore)



il determinante di A è dato dal prodotto
degli elementi sulla diagonale principale

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

Triangolare Superiore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6$$

Triangolare Inferiore

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -15 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETÀ'

A matrice quadrata di ordine n

Proprietà 7

Se in A a tutti gli elementi di una riga (o colonna) si aggiungono i corrispondenti elementi di un'altra riga (o colonna), anche moltiplicati per uno stesso numero k non nullo



il determinante di A resta invariato

IL DETERMINANTE: SUE PROPRIETA'

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = -39$$

↓ alla prima riga aggiungiamo
la seconda moltiplicata per $k = 5$

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 5 + 5 \cdot (-1) & -3 + 5 \cdot (-2) & 2 + 5 \cdot (-3) \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 5 & -3 - 10 & 2 - 15 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -13 & -13 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A' = -39 \end{aligned}$$

Osservazione!

La proprietà 7 risulta molto utile nel calcolo dei determinanti di matrici di ordine superiore al quarto: consente, infatti, di trasformare il determinante dato in uno di eguale ordine, avente, però, una riga (o una colonna) con un numero di zeri maggiore rispetto a quello presente nella matrice assegnata

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**alla seconda riga
togliamo la prima**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1-1 & 3-2 & 1-1 & 4-3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**alla terza riga togliamo
la prima moltiplicata per 2**

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 - 2 \cdot 1 & -1 - 2 \cdot 2 & 1 - 2 \cdot 1 & 3 - 2 \cdot 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**alla quarta riga togliamo
la prima moltiplicata per 5**

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \\ 5 - 5 \cdot 1 & 1 - 5 \cdot 2 & 3 - 5 \cdot 1 & 1 - 5 \cdot 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$



$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \det \mathbf{A}''' = \begin{vmatrix} \boxed{1}^+ & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0^+ & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & -2 & -14 \end{vmatrix} =$$

**fissando la prima colonna
(ha un maggior numero di zeri!!!)**

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 14 + 10 - 9 - 6 = +9$$

I DETERMINANTI: IL TEOREMA DI BINET

A e B matrici quadrate di ordine n



A e B sono ***moltiplicabili***

(A e B devono avere lo stesso ordine!!!)



$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{3 \times 3}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{3 \times 3}$$



$\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono ***moltiplicabili***

(hanno lo stesso ordine!!!)



applicando la regola del
prodotto righe per colonne

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -9 & 13 & -12 \\ 1 & 7 & -4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{AB}_{3 \times 3}$$

$$\det(AB) = 104 + 24 - 168 + 72 = +32$$

$$\det A = -2 - 9 + 6 + 1 = -4$$

$$\det B = -8$$



$$\det A \cdot \det B = (-4)(-8) = +32$$



$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$